T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
LISTA 3

Wrocław, 13 marca 2010

ZADANIE 0. Udowodnij wszystkie fakty dotyczące pojęć domknięcia, wnętrza i brzegu zbioru oraz zbiorów gęstych, brzegowych i nigdzie gęstych, podane na wykładzie bez dowodu.

ZADANIE 1.
a) Wykaż, że domknięcie sumy skończonej zbiorów jest równe sumie ich domknięć. Podaj przykład, że nie jest to prawdą dla sum przeliczalnych.
b) Wykaż, że brzeg sumy skończonej zbiorów jest zawarty w sumie ich brzegów. Podaj przykład, że nie musi być równości, nawet dla zbiorów rozłącznych.

ZADANIE 2. Sprawdź, że zbiór $C^1([0,1])$ funkcji mających ciągłą pochodną na $[0,1]$ jest gęsty i brzegowy w przestrzeni $C([0,1])$ funkcji ciągłych na $[0,1]$ z metryką supremum.

ZADANIE 3. Udowodnij równoważność definicji ciągłości funkcji w punkcie według Heinego i według Cauchy'ego.

ZADANIE 4. Wykaż, że funkcja $f : X \to Y$ z jednej przestrzeni metrycznej w drugą jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $A \subset X$ zachodzi $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Podaj przykład, w którym nie zachodzi równość tych zbiorów, mimo ciągłości funkcji f.

ZADANIE 5. Które z następujących odwzorowań są ciągłe?
(a) $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ z przestrzeni $C([0,1])$ z metryką supremum w przestrzeń $\mathbb{R}$.
(b) $f \mapsto f'$ z przestrzeni funkcji $C^1([0,1])$ mających ciągłą pochodną w $C([0,1])$, gdy w obu przestrzeniach rozważamy metrykę supremum.
(c) $f \mapsto gF$, z przestrzeni $CB([0,\infty))$ (funkcji ciągłych i ograniczonych na półprostej nieujemnej) z metryką supremum w tą samą przestrzeń, gdzie F jest funkcją pierwotną z f spełniającą $F(0) = 0$, a $g(x) = \frac{1}{|x+1|}$. Czy bez funkcji g byłoby OK?

Definicja. Dwie przestrzenie metryczne (X, d_X) i (Y, d_Y) są *homoemorficzne* jeśli istnieje odwracalna (czyli różnowartościowa i „na") funkcja $f : X \to Y$ taka, że f i f^{-1} są ciągłe.

ZADANIE 6.
a) Sprawdź, że pełny kwadrat domknięty i koło domknięte z metrykami euklidesowymi są homeomorficzne.
b) Sprawdź, że koło domknięte z usuniętym punktem środkowym oraz koło domknięte z usuniętym mniejszym kołem domkniętym o tym samym środku są homeomorficzne.
c) Sprawdź, że koło domknięte z usuniętym punktem środkowym i dopełnienie koła otwartego na płaszczyźnie są homeomorficzne.
Wsk.: Zastosuj pewną funkcję zespoloną.

Tomasz Downarowicz